الدوال التوافقية :

لتكن $h = h(x, y)$ دالة متغير حقيقي تتعلق بالمتغيرين المستقلين x, y فنقول عن هذه الدالة أنها توافقية إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى والثانية لهذه الدالة بالنسبة للمتغيرين المستقلين x, y موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك فإنها تحقق معادلة لابلاس التفاضلية الآتية

معادلة لابلاس التفاضلية $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$

مثال: أثبت أن الدالة $u = x^3 - 3xy^2$ دالة توافقية

الحل:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

ونلاحظ أن المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

أي أنها تحقق معادلة لابلاس فإنها دالة توافقية

مبرهنة:

إذا كانت الدالة $f(Z) = u(x, y) + v(x, y)$ دالة تحليلية عندئذ كل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي تكون دوال توافقية.

الإثبات: (سنعتمد في إثبات صحة هذه المبرهنة على مبرهنة سوف نثبت صحتها عند دراسة التكاملات وهذه المبرهنة تنص على ما يلي:

إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة تحليلية عندئذ تملك هذه الدالة مشتقات من مراتب عليا)

بما أن الدالة تحليلية فهي دالة قابلة للاشتقاق وبما أنها قابلة للاشتقاق

فعندئذ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

لنشتق هاتين المعادلتين جزئياً بالنسبة مرة لـ x وثانية بالنسبة لـ y نجد أنه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

وبما أن "f دالة مستمرة عندئذ كل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي لهذه الدالة هي دالة مستمرة وبالتالي فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \wedge \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

ومنه نستنتج أنه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

المرافق التوافقي:

لتكن كل من $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ دالة توافقية نقول عن الدالة f أنها مرافق توافقي للدالة u إذا وفقط إذا حققت هاتان الدالتان شرطي كوشي ريمان أي إذا كان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال: أثبت أن هاتان الدالتان توافقيتان ثم أثبت أن الدالة v مرافق توافقي ل u.

$u = x^2 - y^2$ ، $v = 2xy$

الحل:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$

$2 - 2 = 0$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} =$

$0 + 0 = 0$

نلاحظ بأن:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

أي أن هاتان الدالتان تحققان شرطي كوشي ريمان لذلك فإن الدالة v مرافق توافقي ل u.

Note: إذا كانت الدالة v مرافق توافقي للدالة u فليس من الضروري أن تكون الدالة u مرافق توافقي للدالة v.

Ex. لتكن لدينا الدالة $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$

نلاحظ بأن دالة القسم الحقيقي في هذه الدالة، دالة القسم التخيلي هي دوال توافقية استنادا لما سبق

$\frac{\partial (2xy)}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y$

أي أن شرط كوشي ريمان الأول ما يعني الدالة (x^2-y^2) ليس مرافق توافقي للدالة $2xy$ أي أن u ليست مرافق توافقي ل v

مبرهنة بدون برهان:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

دالة تحليلية وأن يكون v مرافق توافقي لـ u

معنى هذا: 1- f تحليلية ⇐ v مرافق توافقي لـ u

2- اذا كان v مرافق توافقي لـ u فإن f تحليلية

كيفية إيجاد المرافق التوافقي:

لدالة توافقية معطاة $u = u(x,y)$

1- نتأكد بأن الدالة المعطاة توافقية

Ex: $u(x,y) = 2x(y-1) = 2xy - 2x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(y-1) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

⇐ الدالة دالة توافقية

2- لإيجاد v نعلم بأن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x$ ، $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 2$

نكامل هذه المعادلة بالنسبة لـ y

$$v = \int (2y-2)\,dy + \varphi(x)$$

حيث φ دالة كيفية تتعلق بالمتغير ~~الذي لم نكامل بالدالة له~~ المستقل x

$$v = y^2 - 2y + \varphi(x)$$

لكن شرط كوشي ريمان الثاني هو $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

نعوض في شرط كوشي ريمان الثاني كل من $\frac{\partial v}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$

$\varphi'(x) = -2x$ فنحصل على معادلة تفاضلية عادية

ثم نكامل المعادلة التفاضلية السابقة فنجد $\varphi(x) = -x^2 + c$

نعوض أخيراً $\varphi(x)$ في v فنجد أن الموافق التوافقي هو

$$v = y^2 - 2y - x^2 + c$$

أي أنه $f(z) = 2x(y-1) + i(y^2 - 2y - x^2) + ic$

وبالتعويض في هذه العلاقة الأخيرة كل x بـ z وكل y بـ 0 فنحصل على الدالة التحليلية f بدلالة z أي أنه

$$f(z) = 2z(0-1) + i(0 - 20 - z^2) + ic$$

$$f(z) = -2z - iz^2 + ic$$

الفصل الثالث ...

.. بعض دوال المتغير العددي ..

أولاً: الدالة الأسية:

إذا كان لدينا دالة المتغير العقدي $w = f(z)$ وكان المطلوب هو أن تؤول هذه الدالة إلى الدالة الأسية للمتغير الحقيقي x عندما يؤول المتغير العقدي z إلى المتغير الحقيقي x فلابد لهذه الدالة أن تحقق العلاقة

$$f(x, +i0) = e^x$$

لكن نعلم أنه $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

ويجب أن تحقق الدالة $w = f(z)$ الشرط الآتي $\frac{d}{dz} f(z) = f(z)$

ويمكن الإثبات على أن الدالة الوحيدة التي تحقق الشرطان السابقان هي الدالة الآتية

$$(1) \quad f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

هذه الدالة تحقق الشرط الأول وهو

$$f(x + i0) = e^x$$

كما أن الدالة (1) تحقق الشرط الثاني وذلك

$u = e^x \cos y$ $\qquad$ $v = e^x \sin y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x . \cos y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = - e^x \sin y$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي وعلاوة على ذلك نلاحظ بأن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

أي أن الدالة المعرفة بالعلاقة (1) قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي أي أنها تحليلية عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي أي أنها دالة شاملة والمشتقة الأولى لهذه الدالة تعطى بالعلاقة

$$\frac{d}{dz} f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$$

$f(z) = e^z$ وبالتالي فإن الدالة الأسية بالنسبة للمتغير العقدي z هي

أي أن $\quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$

ومن هذه العلاقة وعندما $z = iy$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$ علاقة أويلر

Note: على أن تقاس y بالتقدير الدائري (بالراديان)

خواص الدالة الأسية:

1- نعلم أن $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$ وإذا كان $w = e^z$

ونعرف بأن الصورة القطبية لهذا العدد العقدي هي

$$w = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

بالمقارنة بين العلاقتين نجد أن:

$$\rho = |w| = |e^z| = e^x \quad \wedge \quad \arg e^z = y$$

ويمكن الإثبات على أنه العدد العقدي $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

هي صورة أو ظلال للنقاط $z = \log\rho + i\varphi$

حيث $\log$ هو اللوغاريتم الطبيعي للعدد ρ

وذلك لأنه

$$e^z = e^{\log\rho + i\varphi} = e^{\log\rho} e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

وهذه النقاط $z = \log\rho,\ i\varphi$ نقاط متساوية بالأجزاء الحقيقية وتختلف عن بعضها البعض بالأجزاء التخيلية أي أنه هذه النقطة هي صورة لعدد غير منتهي من النقاط المتساوية بالأجزاء الحقيقة والمختلفة عن بعضها البعض بالأجزاء التخيلية والمثال الآتي يوضح صحة ذلك

EX: أوجد حلول المعادلة

$$e^z = -1$$

الحل:

نفرض أنه $z = x + iy \Leftarrow e^x\cos y + i e^x \sin y = -1$

واعتماداً على تعريف تساوي عددين عقديين ينتج أنه

$$e^x \cos y = -1 \qquad (1)$$

$$e^x \sin y = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة (2) نجد أنه إما $\sin y = 0 \Rightarrow y = n\pi$

نعوض في (1) فنجد أنه $e^x(\pm 1) = -1$

$e^x(-1) = -1 \Rightarrow e^x = -1$

وبما أنه $e^x > 0$ فالمعادلة $e^x = -1$ مستحيلة ومنه فإنه $y = (2n+1)\pi$

ومنه فإنه $e^x = 1 \underset{\text{بأخذ لوغاريتم الطرفين}}{\Leftarrow} x = \log(1) = 0$

أي أنه حلول المعادلة هي $z = 0 + i(2n+1)\pi$

أو $e^x = 0$ مستحيلة

2- نعلم أنه $|w| = |e^z| = e^x > 0$

أي أنه $|w| > 0 \Rightarrow w \neq 0$

من هذا نستنتج أن مجموعة أو مدى الدالة الأسية هي المستوى العقدي w بأكمله باستثناء نقطة الأصل

إذا كان $-\pi < IM\, z \leq \pi$ عندئذ كل نقطة $w = e^{z}$ تكون خيال أو صورة لنقطة واحدة وواحدة فقط من الشريحة التي عرضها $-\pi < IM\, z \leq \pi$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

فعندئذ $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$$e^{z_1} = \rho_1 [\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1]$$

$$e^{z_2} = \rho_2 [\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2]$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

$$= e^{x_1} \cdot e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2} \; e^{i(y_1+y_2)}$$

$$= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

ثانياً: الدوال المثلثية:

نعلم أن

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

بالجمع نجد أن

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

لذلك يمكن تعريف الدوال المثلثية من خلال العلاقات

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

إن كل من دالة الجيب المثلثي ودالة الجيب تمام المثلثي هي دوال شاملة (تحليلية عند جميع نقاط المستوى العقدي) لأن كلاً منهما عبارة عن تركيب خطي لدالتين شاملتين هما e^{iz}, e^{-iz}

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

ويمكننا أن نعرف دالة الظل المثلثي والتظل المثلثي من خلال العلاقتين الآتيتين

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

• ومن خلال التعريف السابق نستنتج أن دالة الظل المثلثي هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء جذور المعادلة $\cos z = 0$ ودالة التظل هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء جذور المعادلة $\sin z = 0$

لإيجاد القسم الحقيقي والقسم التخيلي لدالة الجيب والتجيب نتبع ما يلي:

نفرض أن $z = x + iy$ عندئذٍ

$$\sin z = \frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}}{2i}[\cos x + i\sin x] - \frac{e^{y}}{2i}[\cos x - i\sin x]$$

$$= \left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right)\sin x + i\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \sin x\, ch y + i\cos x\, sh y$$

أي أن

$$Re(\sin z) = \sin x\, ch y$$

$$IM(\sin z) = \cos x\, sh y$$

بشكل مشابه تماماً نجد أن

$$\cos z = \cos x\, ch y - i\sin x\, sh y$$

أي أن

$$Re(\cos z) = \cos x\, ch y$$

$$IM(\cos z) = -\sin x\, sh y$$

$$Re(\sin Z) = \sin x \, ch y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \, ch y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \, sh y$$

$$IM(\sin Z) = \cos x \, sh y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x . sh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \, sh y$$

ونلاحظ بأنه هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك تحقق شروط كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

لذلك $w = \sin Z$ دالة قابلة للاشتقاق والمشتقة الأولى

$$(\sin Z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y = \cos Z$$

$$(\cos Z)' = -\sin Z$$